30/4/2018

$\boxed{\blacktriangleright \text{Θεώρημα}}$ $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός. Τότε:

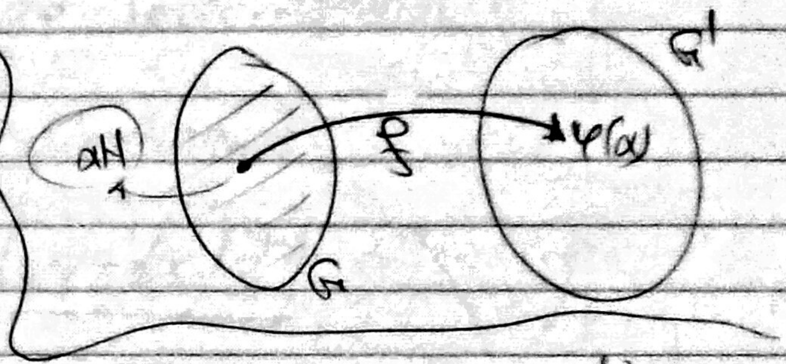
$$G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(G) = \mathrm{Im}\varphi$$

▶ Απόδειξη: Θεωρώ (χάριν ευκολίας) $\boxed{H = \mathrm{Ker}\varphi}$.

και την απεικόνιση: $\boxed{f(\alpha H) = \varphi(\alpha)}$, $f: G/\mathrm{Ker}\varphi \to \varphi(G)$

• Έστω $bH = \alpha H \Rightarrow \boxed{b = \alpha h}$

Και: $f(bH) = \varphi(b)$



• Για να είναι καλά ορισμένη η απεικόνιση f, θα πρέπει $f(bh) = f(\alpha h) \Rightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(b)$

• Έχω: $f(bh) = \varphi(b) = \varphi(\alpha h) = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(h) = \varphi(\alpha)\cdot e' = \varphi(\alpha)$

$$\Rightarrow f(bh) = f(\alpha h) \Rightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(b)$$

~ Άρα, πράγματι, η f είναι καλά ορισμένη!

• Έχω $f((\alpha H)(bH)) = f(\alpha bH) = \varphi(\alpha b) =$

φ ομομορφισμός $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(b) = f(\alpha H)\cdot f(bH)$

~ Άρα, πράγματι, η f είναι ομομορφισμός.

• Έστω: $\alpha H \in Ker f \Rightarrow f(\alpha H) = e' \Rightarrow \varphi(\alpha) = e' \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha \in Ker\varphi = H \Rightarrow \alpha \in H$

→ Συνεπώς $\alpha H \xlongequal{\alpha \in H} H = 1 \cdot H$

→ Άρα, ο πυρήνας έχει μόνο ένα στοιχείο-σύμπλοκο, το ίδιο το H.

Άρα f: "1-1"

• Έστω $\varphi(g) \in \varphi(G)$. Τότε: $f(gH) = \varphi(g)$

$\Rightarrow f$: επί

• Άρα f: ισομορφισμός $\Rightarrow \boxed{G/Ker\varphi \cong \varphi(G)}$

▶ Άσκηση Έστω $GL(\mathbb{R}^{4\times 4}) = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid \det A \neq 0\}$.

• Δείξτε ότι η $SL(\mathbb{R}^{4\times 4}) = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid \det A = 1\}$ είναι κανονική υποομάδα της $GL(\mathbb{R}^{4\times 4})$ και βρείτε την ομάδα πηλίκο: $GL(\mathbb{R}^{4\times 4})/SL(\mathbb{R}^{4\times 4})$

• **Λύση**: Θεωρώ την απεικόνιση $f: GL(\mathbb{R}^{4\times4}) \to \mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

, με $f(A)=\det A$

• $f(AB)=\det(AB)=\det A\cdot\det B=f(A)\cdot f(B)$

$\Rightarrow f$: καλά ορισμένη & ομομορφισμός.

• Έστω $A\in \mathrm{Ker}f \Rightarrow f(A)=1 \Rightarrow A\in SL(\mathbb{R}^{4\times4})$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}f \subseteq SL(\mathbb{R}^{4\times4})}$

Έστω $A\in SL(\mathbb{R}^{4\times4}) \Rightarrow \det A=1 \Rightarrow f(A)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A\in \mathrm{Ker}f \Rightarrow \boxed{SL(\mathbb{R}^{4\times4})\subseteq \mathrm{Ker}f}$

→ Άρα: $\boxed{\mathrm{Ker}f = SL(\mathbb{R}^{4\times4})}$

→ Όμως, γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}f$ είναι κανονική υποομάδα του $GL(\mathbb{R}^{4\times4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}f \trianglelefteq GL(\mathbb{R}^{4\times4}) \Rightarrow \boxed{SL(\mathbb{R}^{4\times4}) \trianglelefteq GL(\mathbb{R}^{4\times4})}$

• Δείξαμε ότι $GL(\mathbb{R}^{4\times4}) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$ με

$f(A)=\det(A)$ είναι ομομορφισμός με πυρήνα την $SL(\mathbb{R}^{4\times4})$

• Άρα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα των Ομομορφισμών, γνωρίζουμε ότι:

$$GL(\mathbb{R}^{4\times4})/\ker f \simeq f(GL(\mathbb{R}^{4\times4}))$$

• Είναι η f επί; Έστω $r \in \mathbb{R}^*$. Τότε:

$$f\left(\begin{pmatrix} r & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} r & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{r}$$

Άρα η f επί!

• Συνεπώς: $\boxed{GL(\mathbb{R}^{4\times4})/SL(\mathbb{R}^{4\times4}) \simeq \mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}}$

▸ **Άσκηση**: Έστω G ομάδα. Βρείτε την $G/\{1\}$

▸ **Λύση**: Θεωρώ την ταυτοτική απεικόνιση:

$$Id: G \to G, \quad \text{με } \boxed{Id(g) = g}$$

• $Id(\alpha b) = \alpha b = Id(\alpha) Id(b) \Rightarrow Id$: ομομορφισμός!

• Προφανώς είναι 1-1 και επί

• Από το Θεμελιώδες Θεώρημα ομομορφισμών $\Rightarrow$

$$\Rightarrow G/\ker(Id) \simeq Id(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G/\{1\} \simeq G}$$

Άσκηση $G/G = \;?$, $G \trianglelefteq G$

Λύση • Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi: G \to \{1\}$, με $\boxed{\varphi(g) = 1}$. Τότε:

• $\varphi(\alpha b) = 1 = 1 \cdot 1 = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(b) \Rightarrow \varphi$: ομομορφισμός

• Από το Θεμελιώδες Θεώρημα ομομορφισμών:

$$\boxed{G/\mathrm{Ker}\varphi \simeq \varphi(G)}$$

• Συνεπώς $\boxed{\mathrm{Ker}\varphi = G}$, φ: επί $\Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \varphi(G) = \{1\}$

→ Άρα: $\boxed{G/G = \{1\}}$

Άσκηση $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$

• **Λύση**: Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, με $\boxed{\varphi(\alpha) = [\alpha]_n}$. Τότε:

• $\varphi(\alpha + b) = [\alpha + b]_n = [\alpha]_n + [b]_n = \varphi(\alpha) + \varphi(b)$

$\Rightarrow \varphi$: ομομορφισμός

• Από το Θεμελιώδες Θεώρημα ομομορφισμών, έχω:

$$\boxed{\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\varphi \simeq \varphi(\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}\varphi}$$

• **Έστω**: $\alpha \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(\alpha) = [0]_n \Rightarrow [\alpha]_n = [0]_n \Rightarrow$

$\Rightarrow n \mid \alpha - 0 \Rightarrow n \mid \alpha \Rightarrow \alpha = n \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \in n\mathbb{Z}} \Rightarrow \boxed{Ker\varphi \subseteq n\mathbb{Z}}$

Έστω: $\alpha \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = n \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \mid \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \equiv 0 \mod n \Rightarrow [\alpha]_n = [0]_n \Rightarrow \varphi(\alpha) = [0]_n$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \in Ker\varphi} \Rightarrow \boxed{n\mathbb{Z} \subseteq Ker\varphi}$

• **Άρα** : $\boxed{Ker\varphi = n\mathbb{Z}}$

• **Αρκεί να δ.** φ: επί. Τότε $\underline{Im\varphi = \mathbb{Z}_n}$

→ **Έχω**: $[j]_n \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow \boxed{\varphi(j) = [j]_n}$ με $\underline{j \in \mathbb{Z}}$

Άρα, φ: επί $\Rightarrow \boxed{Im\varphi = \mathbb{Z}_n}$

• **Συνεπώς** : $\mathbb{Z}/Ker\varphi \simeq Im\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n = \{[\alpha]_n / \alpha \in \mathbb{Z}\} \\ \quad \| \\ \{\alpha + n\mathbb{Z} / \alpha \in \mathbb{Z}\} \end{array}}$$

✓

▸ **Θεώρημα** { Κάθε κυκλική ομάδα είναι ισόμορφη είτε με το $\mathbb{Z}$ είτε με το $\mathbb{Z}_n$, για $n \in \mathbb{N}$

▸ **Απόδειξη**: • Έστω G: κυκλική ομάδα $\Rightarrow$

$\Rightarrow G = \langle \alpha \rangle = \{ \alpha^n \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha \in G \}$

• Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \to G = \langle \alpha \rangle$,

, με $\boxed{\varphi(k) = \alpha^k}$

• Έχω ότι: $\varphi(k+\lambda) = \alpha^{k+\lambda} = \alpha^k \cdot \alpha^\lambda = \varphi(k) \cdot \varphi(\lambda)$

$\Longrightarrow \varphi$: ομομορφισμός

• Από το Θεμελιώδες Θεώρημα ομομορφισμών ομάδων, έχω:

~ $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}\,\mathbb{Z}$

• Έστω $g \in G \Longrightarrow g = \alpha^s = \varphi(s) \Rightarrow \boxed{\varphi : \text{επί}}$

$\Longrightarrow \boxed{\varphi(\mathbb{Z}) = G}$

~ Άρα: $\boxed{G \cong \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\varphi}$

• Γνωρίζουμε ότι: $\mathrm{Ker}\varphi \leq \mathbb{Z}$: κυκλική $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi$: κυκλική

~ Άρα: $\mathrm{Ker}\varphi = \langle n \rangle = \langle -n \rangle = \langle |n| \rangle$

• Διακρίνω περιπτώσεις:

(i) Αν $n=0 \Longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \langle 0\rangle = \{0\} \Longrightarrow G \cong \mathbb{Z}/\{0\}$

$\Longrightarrow \boxed{G \cong \mathbb{Z}}$

(ii) Αν $n \neq 0$, τότε θέτω: $\boxed{n = |n|} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow G \cong \mathbb{Z}/\langle n\rangle = n\mathbb{Z} \Longrightarrow \boxed{G \cong \mathbb{Z}_n}$

$\boxed{\text{▶ Παράδειγμα}}$ Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από την $\mathbb{Z}_{12}$ στην $\mathbb{Z}_5$.

• Λύση • Έστω: φ ομομορφισμός: $\mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.

• Καθώς $\mathbb{Z}_{12} = \langle [1]_{12} \rangle$, έχω ότι:

$\varphi([1]_{12}) = \alpha \Longrightarrow \varphi([2]_{12}) = \varphi([1]_{12} + [1]_{12}) =$

$= \varphi([1]_{12}) + \varphi([1]_{12}) = \alpha + \alpha = 2\alpha$

• Επαγωγικά: $\boxed{\varphi([n]_{12}) = n\cdot\alpha}$

• Έχουμε, λοιπόν, ότι: $\operatorname{ord}(\varphi([1]_{12})) \mid \operatorname{ord}([1]_{12}) = 12$

Από Θ. Lagrange: $\operatorname{ord}(\varphi([1]_{12})) \mid |\mathbb{Z}_5| = 5$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{ord}(\varphi([1]_{12})) = 1 \Longrightarrow \boxed{\varphi([1]_{12}) = [0]_{12}}$

• <u>Συνεπώς</u>: $\varphi([4]) = 4 \cdot [0]_5 = [0]_5$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi([4]_{12}) = [0]_5}$$

• <u>Προφανώς</u>: $\operatorname{Im}\varphi = \{[0]_5\}$ & $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}_{12}$

▶ **Θεώρημα**: Έστω $H \trianglelefteq G$. Τότε η $\gamma: \underline{G \longrightarrow G/H}$, με $\boxed{\gamma(g) = gH}$ είναι <u>ομομορφισμός</u>, με <u>πυρήνα την</u> H

▶ <u>Απόδειξη</u>: • <u>Έχω</u> ότι:

$$\gamma(\alpha \cdot b) = \alpha b H = \alpha H \cdot bH = \underline{\gamma(\alpha) \cdot \gamma(b)}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma: \text{ομομορφισμός}}$$

• <u>Έστω</u>: $\alpha \in \operatorname{Ker}\gamma \Rightarrow \gamma(\alpha) = eH = H \Rightarrow \alpha H = H \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \in H}$$ (πράξη του α με το H, μας [illegible] του H $\Rightarrow \alpha \in H$)

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Ker}\gamma \subseteq H}$$

• <u>Έστω</u> $\underline{h \in H} \Rightarrow \gamma(h) = h \cdot H \xlongequal{h \in H} H \Rightarrow \underline{h \in \operatorname{Ker}\gamma}$

$$\Rightarrow \boxed{H \subseteq \operatorname{Ker}\gamma}$$

⤳ <u>Άρα</u>: $\boxed{\operatorname{Ker}\gamma = H}$

▶ $\boxed{\text{Θεώρημα}}$ Έστω G αβελιανή ομάδα και $H \leq G$.

Τότε $H \trianglelefteq G$ και η G/H είναι αβελιανή.

▶ Απόδειξη: • $H \leq G$. Τότε:

• $gH = \{gh / h \in H\} \xlongequal{G \text{ αβελιανή}} \{hg / h \in H\} = Hg$

$\Rightarrow \boxed{H \trianglelefteq G}$

• Έστω $x, y \in G/H \Rightarrow \boxed{x = a \cdot H}, \boxed{y = b \cdot H}$

Έχω, ότι: $x \cdot y = aH bH = abH \xlongequal[a,b \in G]{G \text{ αβελιανή}} baH$

$= y \cdot x \quad \Rightarrow \boxed{G/H : \text{αβελιανή}}$.

▶ $\boxed{\text{Θεώρημα}}$ Έστω G: κυκλική και $H \leq G$. Τότε:

$H \trianglelefteq G$ και η G/H είναι κυκλική.

▶ Απόδειξη: G: κυκλική $\Rightarrow G = \langle a \rangle$

• Για $aH \in G/H \Rightarrow \boxed{\langle aH \rangle \subseteq G/H}$

• Έστω $bH \in G/H \xrightarrow[b = a^{\lambda}]{b \in G} bH = a^{\lambda}H = (aH)^{\lambda} \Rightarrow \boxed{bH \in \langle aH \rangle}$

↝ Άρα: $\boxed{\langle aH \rangle = G/H} \Rightarrow \boxed{G/H : \text{κυκλική}}$

▸ **Παράδειγμα** $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$, $H=\langle([2]_4,[2]_6)\rangle$

Βρείτε την ομάδα πηλίκο G/H.

▸ **Λύση**: • Έχω, ότι: $|G| = o(G) = |\mathbb{Z}_4|\cdot|\mathbb{Z}_6| = 24$

• $ord([2]_4,[2]_6) = ΕΚΠ(ord([2]_4), ord([2]_6)) = ΕΚΠ(2,3) = \boxed{6}$

• Επίσης: $H=\langle([2]_4,[2]_6)\rangle = \{([2]_4,[2]_6), ([0]_4,[4]_6), ([2]_4,[0]_6),$

$([0]_4,[2]_6), ([2]_4,[4]_6), ([0]_4,[0]_6)\}$

• Άρα: $[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow \boxed{|G/H| = 4}$

▸ **Σύμπλοκα**:

(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(2,2)	(3,2)	(2,3)	(3,3)
(0,4)	(1,4)	(0,5)	(1,5)
(2,0)	(3,0)	(2,1)	(3,1)
(0,2)	(1,2)	(0,3)	(1,3)
(2,4)	(3,4)	(2,5)	(3,5)
$(0,0)+H$	$(1,0)+H$	$(0,1)+H$	$(1,1)+H$

• $ord((0,0)+H) = 1$, $ord((0,1)+H) = 2$

• $ord((1,0)+H) = 2$, $ord((1,1)+H) = 2$

↝ • Άρα, η ομάδα G/H είναι η ομάδα

του Klein (Προφανώς αφού η G: μη κυκλική)